Μια ιστορία Μαθηματικών

Δρ Δ. Α. Πλιάκης, Υπότροφος Marie Curie
Τμήμα Φυσικών Πόρων και Περιβάλλοντος / ΤΕΙ Κρήτης

22 Σεπτεμβρίου 2006

Με αφορμή τη δημοσιότητα -ασυνήθιστη για τα ελληνικά δεδομένα- που έλαβε η στάση του Ρωσοεβραίου μαθηματικού Grigory Perelman , να απορριψει τόσο το επάθλο του 1 εκατ. δολλαριων ΗΠΑ που προσφέρει το ιδρυμα του Harvard, "Clay Institute" για την επίλυση της εικασίας Poincaré οσο και το μετάλλιο Fields θα ήθελα να προσκαλέσω τους συμπολίτες μου σε μία περιήγηση στον κόσμο των Μαθηματικών. Στην πορεία θα συναντήσουμε τον άγνωστο στο ευρύ κοινό, διαπρεπή έλληνα μαθηματικό Χρίστο Παπακυριακόπουλο (Αθήνα 1914- Princeton 1976). Θα προσπαθήσω να χρησιμοποιήσω την ελάχιστη δυνατή ορολογία προσπαθώντας όμως να διατηρήσω την επιστημονική σαφήνεια.

Ελπίζω να μην αποτελεί παρασπονδία η αθέτηση της υπόσχεση μου και η λιτή αναφορά στο ότι η εικασία του Poincaré εντάσσεται στην περιοχή της 'Αλγεβρικής Τοπολογίας' ενω η τελική επίλυση του συντελέστηκε με μεθόδους της 'Γεωμετρικής Ανάλυσης'- σπεύδω να διευκρινίσω τους όρους. Η αλγεβρική τοπολογία και η γεωμετρική ανάλυση είναι δύο κλάδοι των συγχρονων μαθηματικών που με διαφορετικές προσεγγίσεις μελετούν τις διάφορες γεωμετρικές μορφές: η μεν αλγεβρική τοπολογία με μεθόδους άλγεβρας (θεωρία ομάδων) η δε γεωμετρική ανάλυση με μεθόδους ανάλυσης (διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους). Ήδη από την αρχή διαπιστώνουμε τη σημασία της εικασίας Poincaré καθώς βρίσκεται στο σταυροδρόμι των παραδοσιακών κλάδων των μαθηματικών: Αλγεβρα, Ανάλυση, Γεωμετρία.

Μη ευκλείδια Γεωμετρία. Από τα μεσα του 19ου αιώνα και απο τις εργασίες των Gauss, Riemann, Lobachefsky διαπιστώθηκε η ύπαρξη χώρων ριζικά διαφορετικών απο τον οικείο σε όλους Ευκλείδιο χώρο. Συγκεκριμένα διαπιστώθηκε οτι υπάρχουν χώροι στους οποίους το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου θα μπορούσε να είναι διαφορετικό από δύο ορθές. Έτσι ένα τρίγωνο που οι γωνίες του έχουν άθροισμα μεγαλύτερο από δύο ορθές λέμε ότι κείται σε περιοχή όπου η 'καμπυλότητα' έιναι θετική (π.χ. στην επιφάνεια μιας σφαίρας) ενώ όταν το άθροισμα ειναι μικρότερο των δύο ορθών λέμε ότι βρίσκεται σε περιοχή αρνητικής καμπλυλότητας (π.χ. στην επιφάνεια ενός σάγματος-σαμαριού). Ήδη τότε διαπιστώθηκε ότι καθε επιφάνεια (της καθημερινής εμπειριάς) προκύπτει από τη σύγκόλληση σφαρικών και σαγματικών κομματιών (εικ. 3,4). Ειρήστω έν παρόδω ότι ο κορυφαίος παγκόσμια ειδικός της θεωρίας επιφανειών είναι ο Ν. Καπουλέας (Πανεπιστήμιο Brown και Θεσσαλονίκης).

Ανάλυση. Παραδοσιακά η ανάλυση είναι η μελέτη του απείρου: η προσέγγιση καποιου σημείου στο χώρο με διαδοχικά βήματα που μας φέρνουν ολοένα και πιο κοντά στον επιθυμητό στόχο: από ένα κανονικό πολύγωνο με συνεχείς διαθλάσεις των πλευρών του οδηγούμαστε στον εγγεγραμμένο η περιγεγραμμένο κύκλο. Εναρκτήρια διαπίστωση ο νόμος του Newton : η δύναμη προσδιορίζει την τροχιά στην οποία θα κινηθεί το σώμα που την υφίσταται. Ο νόμος του Newton είναι ένα παράδειγμα αυτού που ονομάζουμε διαφορική εξίσωση: η μεταβολή χωρική η χρονική μίας άγνωστης ποσότητας δίνεται συναρτήσει γνωστών ποσοτήτων. Αργότερα οι φυσικοί ανακάλυψαν τους νόμους του ηλεκτρομαγνητισμού που εκφράζονται με διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους και έκτοτε κάθε φυσικό φαινόμενο εκφράζεται με τη μορφή διαφορικών εξισώσεων οι οποίες εν τέλει μας επιτρέπουν να διαπιστώσουμε το αποτέλεσμα απο δεδομένο αίτιο και να επιτύχουμε αυτό που αποτελεί ακρογωνιαίο λίθο των θετικών επιστημών την 'πρόβλεψη των φυσικών φαινομένων'.

Άλγεβρα. Η αφετηρία της άλγεβρας υπήρξε η μελέτη των διοφαντικών εξισώσεων: εξισώσεων όπου όλα τα δεδομένα και οι επιθυμητές λύσεις είναι ακέραιοι αριθμοί. Οι εξισώσεις αυτές μπορούν να προκύψουν από απλά προβλήματα της γεωμετρίας όπως η τριχοτόμηση της γωνίας και ο διπλασιασμός του κύβου με κανόνα και διαβήτη κλπ. Στα μέσα του 19ου αιώνα οι E. Galois, N. Abel θεμελίωσαν τη συγχρονη άλγεβρα εισάγοντας την ιδέα της ομαδας ως το σύνολο των μεταθέσεων των στοιχείων ενός πεπερασμένου συνόλου με τη δυνατότητα σύνθεσης δύο μεταθέσεων για να λάβουμε μία τρίτη. Αργότερα οι F. Klein, S. Lie εισήγαγαν τις ομάδες των μετασχηματισμών που μπορεί υποστεί ένας γεωμετρικός χώρος χωρίς να υποστεί κάποια ουσιώδη (ως προς κάποια κριτήρια) αλλαγή (π.χ. περιστροφή ενός πολυγώνου ή ανάκλαση του ως προς αξονες ή σημεία).

Η εικασία του Poincaré. Στα τέλη του 19ου αι. (1887) ο βασιλιάς της Σουηδίας Oscar II αθλοθέτησε ένα έπαθλο για τη λύση του προβλήματος της ευστάθειας του Ηλιακού Συστήματος δηλαδή εάν οι τροχιές των πλανητών πρόκειται κάποτε να συναντηθούν λόγω της βαρυτικής έλξης μεταξύ τους. Το έπαθλο κέρδισε ο Γάλλος μαθηματικός, φυσικός και φιλόσοφος Henri Poincaré (1854-1912) δίνοντας ωστόσο την απάντηση ότι με τις γνωστές μεθόδους το πρόβλημα δε μπορεί να λυθεί. Προκειμένου να καταλήξει σε αυτό το συμπέρασμα δημιούργησε τον κλάδο της αλγεβρικής τοπολογίας και διατύπωσε την εικασία του. Τελικά η ευστάθεια του Ηλιακού συστήματος απαντήθηκε μερικά απο τις εργασιές των μαθηματικών Kolmogorov, Arnol'd και Moser στις αρχές της δεκαετίας του '60.

Πριν προχωρήσω στη διατύπωση της εικασίας θα ήθελα να δώσω έναν τρόπο αντίληψης της γνωστής μας σφαίρας. Πάρτε ένα κυκλικό δίσκο απο ελαστική μεμβράνη και προσπαθήστε να φτιάξετε ένα μπαλόνι: ουσιαστικά κυρτώνετε τη μεμβράνη συρρικνώνοντας ταυτόχρονα τον εξωτερικό κύκλο ολοένα και περισσότερο έως ότου αυτός καταλήξει να είναι ένα σημείο. Τώρα μόλις φτιάξατε μία σφαίρα, η οποία ωστόσο έχει φύγει από το επίπεδο και ζει στον τρισδιαστατο χώρο. Παρολαυτά έχουμε ανοίξει το δρόμο προς την αφαίρεση: φανταζόμαστε ότι έχουμε μία δεύτερη μεμβράνη η οποία παραμένει στο επίπεδο και ο εξωτερικός κύκλος της διαστέλλεται ακολουθώντας τη συρρίκνωση του εξωτερικού κύκλου της πρώτης: εν τέλει θα συναντήσει το επ' άπειρον σημείο του επιπέδου (εικ. 1,2). Εάν ακολουθήσουμε την ίδια αφαιρετική διαδικασία ξεκινώντας από μία μπάλα στο συνηθισμένο χώρο και διαστέλλοντας τη σφαίρα που την περιβάλλει οδηγώντας την στο επ΄ άπειρο σημείο του τρισδιάστατου χώρου λαμβάνουμε αυτό που θα λέμε σφαίρα τριών διαστάσεων. Η διαδικασία αυτή μας επιτρέπει να πούμε ότι καμπυλώσαμε το χώρο μας. Σκεφτείτε οτι στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήγαμε εάν τοποθετούσαμε μία μπάλα σε μία οσοδήποτε ελαστική κυκλική μεμβράνη: καθώς θα αυξάναμε το βάρος της μπάλας η μεμβράνη να καμπυλωνόταν και ο εξωτερικός της κύκλος θα κατέληγε οριακά σε ένα σημείο. Παρατηρείστε ότι η σφαίρα και ο ευκλείδιος χώρος διαφέρουν τελικά ως προς το επ΄ άπειρο σημείο. Η προσθήκη του επ΄ απειρο σημείου εισάγει και την καμπύλωση του χώρου. Εδώ βλέπουμε μία ιδιότητα που μοιράζονται η τρισδιάστατη σφαίρα όσο και ο τρισδιάστατος ευκλείδιος χώρος: δεν υπάρχει κανένα εμπόδιο στην κατάρρευση ενός βρόγχου η μιας διδιάστατης σφαίρας σε σημείο: αυτό δε θα μπορούσε να συμβεί εάν απο το χώρο μας είχαμε αφαιρέσει μία διδιάσταη σφαίρα ή μία σαμπρέλα. Η εικασία του Poincaré ισχυρίζεται ότι ο μοναδικός πεπερασμένος (χωρίς επ΄ άπειρο σημεία) γεωμετρικός χώρος με αυτή την ιδιότητα είναι η τρισδιάστατη σφαίρα, εάν βέβαια θεωρήσουμε ότι ένας γεωμετρικός χώρος είναι 'κατασκευασμένος απο έλαστικο υλικό ' και οι ελαστικές παραμορφώσεις δεν επηρεάζουν την (τοπολογική) δομή του.

Φυσικά θα αναρωτιόταν κάποιος για τη σημασία αυτού του προβλήματος. Αρκεί να σκεφτούμε ότι στις αρχές του 20ου αι. (1915) ο Albert Einstein εισήγαγε τη Γενική θεωρία της Σχετικότητας η οποία περιγράφει μέσω των ομώνυμων εξισώσεων την εξέλιξη του σύμπαντος. Η μάζα καμπυλώνει το χώρο και όπως έχει δείξει ο Δ. Χριστοδούλου (Ομοσπ. Πολυτεχνείο Ζυρίχης) κατάλληλες πυκνότητες μάζας οδηγούν αναπόφευκτα στη δημιουργία μελανών οπών δηλαδή στην αφαίρεση σφαιρικών περιοχών απο το σύμπαν (το σύμπαν δεν επεκτείνεται πέρα από τις σφαίρες αυτές). Η μελέτη τρισδιάστατων γεωμετρικών χώρων οδηγεί στην περιγραφή δυνατών μορφών του σύμπαντος στο οποίο ζούμε και το οποίο είναι μία ζωντανή οντότητα.

Η εικασία του Poincaré προσέλκυσε το ενδιαφέρον διαφόρων μαθηματικών από τις αρχές του 20ου αι. Το 1919 ο Max Dehn επεχείρησε μία πρώτη προσπάθεια διελεύκανσης του τοπίου, ωστόσο ο βασικός ισχυρισμός αποδείχθηκε σωστά μόλις το 1957 από το Χρ. Παπακυριακόπουλο. Ο Παπακυριακόπουλος ειχε καταφύγει το 1948 στο Princeton εργαζόμενος με την υποστήριξη του R. Fox αποφεύγοντας τις διώξεις λόγω των αριστερών του φρονημάτων και της συμμετοχής στο ΕΑΜ. Ο Παπακυριακόπουλος υπήρξε ο πρωτοπόρος στην αλγεβρική τοπολογία των 3 διαστάσεων όταν η επικρατούσα τάση ήταν η τοπολογία στις υψηλές διαστάσεις. Ας σημειωθεί ότι παρόμοιες εικασίες είχαν διατυπωθεί σε χώρους διαστάσεων μεγαλύτερων απο τις 4 ήδη από το 1961 και στις 4 το 1983. Ωστόσο το αρχικό πρόβλημα αντιστεκόταν έως το 2003. Το 1986 ο W. Thurston βασιζόμενος κυρίως στη δουλειά του Παπακυριακόπουλου διατύπωσε το πρόγραμμα γεωμετρικοποίησης των τρισδιάστατων χώρων, το οποίο περιελάμβανε ως ειδική και πιο δύσκολη περίπτωση την εικασία Poincaré . Το πρόγραμμα αυτό πρότεινε την αποσύνθεση των τρισδιάστατων χώρων σε απλά κομμάτια όπως περιγράψαμε προηγουμένως για τις διδιάστατες επιφάνειες (εικ. 3,4). Ήδη απο το 1982 ο R. Hamilton είχε την ιδέα να μελετήσει την εικασία του Poincaré μέσω μίας διαφορικής εξίσωσης που περιέγραφε ένα δυνατό τρόπο διάχυσης της καμπυλότητας στο χώρο. Παρόμοιες ιδέες διαχύσεως της καμπυλότητας είχαν προτείνει οι φυσικοί προσπαθώντας να παρακάμψουν τις δύσκολες εξισώσεις Einstein και να δώσουν πιθανά σενάρια για την εξέλιξη του σύμπαντος. Ωστόσο το 1997 οι προσπάθειες του Hamilton φαινόταν ότι είχαν οδηγηθεί στα όρια τους. Στις 16 Οκτωβρίου 2002 ο G. Huisken στην ομιλία του στο Ινστιτούτο Einstein συνόψιζε τα επιτεύγματα του Hamilton καταλήγοντας στο συμπέρασμα ότι η αναγκαία συνθήκη αρμονικής διάχυσης της καμπυλότητας φαινόταν αδύνατον να διασφαλιστεί και ο H. Bray πρότεινε μια εναλλακτική μέθοδο επίλυσης της εικασίας. Στις 22 Νοεμβρίου 2002 εμφανίστηκε στο διαδίκτυο η εργασία του G. Perelman με τον τίτλο 'Μία σχέση εντροπίας για τη ροή Ricci και οι γεωμετρικές της εφαρμογές'. Στις 20 Ιανουαρίου 2003 στο 'Σεμινάριο 2 πόλεων, Βερολίνου-Λειψίας' ο Perelman μετά από 7 χρόνια απομόνωσης ανακοίνωσε την επίτευξη της συνθήκης αρμονικής διάχυσης της καμπυλότητας. Στη συνέχεια κατόπιν προσκλήσεως έδωσε διαλέξεις στη Βοστώνη, Νέα Υόρκη, Princeton, Palo Alto διευκρινίζοντας τις λεπτομέτρειες των εργασιών του, δηλώνοντας ότι δεν επιθυμει το βραβείο Clay ενώ απέρρίψε θέσεις στα καλύτερα ιδρύματα των ΗΠΑ επιστέφοντας στην ηρεμία της Αγ. Πετρούπολης. Η παγκόσμια μαθηματική κοινότητα είναι εκστασιασμένη. Ο επίλογος μάλιστα είναι ότι οι νομικοί σύμβουλοι του Harvard διευκρίνισαν ότι ο μόνος που μπορεί να λάβει το βραβειο είναι ο Perelman καθώς η αδημοσίευτη εργασία (χωρίς τα δικαιώματα πνευματικής ιδιοκτησίας που εξασφαλίζει η δημοσίευση σε περιοδικό η βιβλίο) στις ΗΠΑ προστατευέται ισχυρά για τους προφανείς λόγους.